99 MATH. I - MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. .
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - MP.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.
Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit I le segment $[0, 1]$; une fonction réelle f, définie sur l'intervalle I, est continue par morceaux s'il existe une subdivision finie de I : $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$, telle que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est continue et se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{i-1}, x_i]$. Il est admis qu'une fonction f continue par morceaux sur I est bornée. La borne supérieure des valeurs prises par la fonction $|f|$ est désignée par $\|f\|$, $(\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|)$.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues par morceaux sur I. Il est admis que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Les suites considérées dans ce problème sont des suites de nombres réels indexés par des entiers strictement positifs : $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Suite équi-répartie dans I : une suite $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I, $(0 \leqslant a_n \leqslant 1)$ est équi-répartie dans I, si et seulement si, pour toute fonction f de E, la suite des moyennes arithmétiques des valeurs prises par la fonction f aux N points a_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, est convergente et de limite l'intégrale de la fonction f étendue à l'intervalle I :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\, dx .$$

Suite équi-répartie modulo I : étant donnée une suite de réels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite des réels définis par la relation : pour tout entier n strictement positif $a_n = r_n - [r_n]$, où

Tournez la page S.V.P.

$[r_n]$ est la partie entière du réel r_n ($[r_n]$ est un entier tel que $[r_n] \leqslant r_n < [r_n]+1$). La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, si et seulement si la suite des réels a_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est équi-répartie dans I.

1°) Un critère d'équi-répartition :

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels a_n, $n\in\mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle I. Soit F_A le sous-ensemble des fonctions de l'espace E pour lesquelles la relation ci-dessous a lieu :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\, dx .$$

a. Démontrer que le sous-ensemble F_A de E est un sous-espace vectoriel de E et que toutes les fonctions constantes de E appartiennent au sous-espace vectoriel F_A.

b. Soit g une fonction de l'espace E telle que, pour tout ε positif donné, il existe deux fonctions f_1 et f_2 appartenant au sous-espace vectoriel F_A telles que la fonction g soit comprise entre f_1 et f_2 et l'intégrale de la fonction g étendue à I soit comprise à ε près entre les intégrales des fonctions f_2 et f_1 :

- pour tout réel x de I, $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$,
- $\int_0^1 f_2(x)\, dx - \varepsilon \leqslant \int_0^1 g(x)\, dx \leqslant \int_0^1 f_1(x)\, dx + \varepsilon$.

Démontrer que la fonction g appartient au sous-espace vectoriel F_A.

c. Démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il suffit que le sous-espace vectoriel F_A contienne une partie P de E dense dans E.

2°) Une condition nécessaire et suffisante d'équi-répartition :

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels a_n, $n\in\mathbb{N}^*$, appartenant à l'intervalle $I = [0, 1]$.
Soit J un intervalle, contenu dans l'intervalle I, d'extrémités c et d ; soit h_J la fonction égale à 1 sur l'intervalle J et à 0 sur le complémentaire de J dans I :

$$h_J(x) = \begin{cases} 1, \text{ si x appartient à J contenu dans I ,} \\ 0, \text{ si x appartient à I sans appartenir à J .} \end{cases}$$

a. Démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il suffit que, pour tout intervalle J de I, la fonction h_J appartienne au sous-espace F_A de E.

b. Soit J un intervalle dont les extrémités c et d vérifient les inégalités : $0 < c < d < 1$. Étant donné un réel positif ε donné, ($\varepsilon > 0$), déterminer, deux fonctions continues f_1 et f_2 vérifiant les relations :

- $f_1(0) = f_1(1)$, $f_2(0) = f_2(1)$, pour tout réel x de I, $f_1(x) \leqslant h_J(x) \leqslant f_2(x)$,
- $\int_0^1 f_2(x)\, dx - \varepsilon \leqslant \int_0^1 h_J(x)\, dx \leqslant \int_0^1 f_1(x)\, dx + \varepsilon$.

La construction claire des graphes des deux fonctions f_1 et f_2 tient lieu de réponse.

Il est admis que la conclusion précédente est valable pour tout intervalle J, contenu dans l'intervalle I, sans que la condition $0 < c < d < 1$ sur ses extrémités soit réalisée. En déduire : pour que la suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit équi-répartie dans I, il suffit que toutes les fonctions continues prenant mêmes valeurs aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle I appartiennent au sous-espace vectoriel F_A de E.

c. Étant donné un entier N ($N > 0$), soit N(J) le nombre de termes a_n de la suite A qui appartiennent à l'intervalle J et dont les indices n sont inférieurs ou égaux à N ; démontrer que, pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il faut et il suffit que, pour tout intervalle J, la suite des réels $\frac{N(J)}{N}$, $N\in\mathbb{N}^*$, soit convergente et de limite d–c, lorsque l'entier N croît vers l'infini : $\lim_{N\to\infty} \frac{N(J)}{N} = d - c$.

3°) <u>Un critère d'équi-répartition modulo I ; théorème de Bohl</u> :

Étant donnés une suite de réels $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et deux entier naturels k et N strictement positifs, soit C(R, k, N) le nombre complexe défini par la relation suivante :

$$C(R, k, N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(2\, i\, \pi\, k\, r_n)\,.$$

a. Démontrer que, si la suite $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, pour tout entier k strictement positif, la limite de l'expression C(R, k, N), lorsque l'entier N croît indéfiniment, est nulle : $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(2\, i\, \pi\, k\, r_n) = 0$.

b. Démontrer réciproquement, qu'une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, si, pour tout entier k strictement positif, la limite, lorsque l'entier N croît vers l'infini, de l'expression C(R, k, N) est nulle.

c. Exemple : soit θ un réel donné. Démontrer que la suite des réels $n\theta$, $n\in\mathbb{N}^*$, est équi-répartie mudulo I si et seulement si le réel θ est irrationnel.

Dans les questions suivantes le résultat classique de Cesaro est admis et peut être utilisé : si une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite ℓ, la suite de terme général $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$, $N\in\mathbb{N}^*$, est convergente et de limite ℓ.

Tournez la page S.V.P.

4°) Exemples de suites équi-réparties modulo I :

Dans cette question la suite $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ considérée est définie à partir d'une fonction φ réelle définie sur la demi-droite fermée $[1, \infty[$: pour tout entier n $(n \geqslant 1)$ $r_n=\varphi(n)$. Soient r_n, A_n les nombres complexes définis par les relations suivantes :

$$d_n = r_{n+1} - r_n \ , \ A_n = \exp(2i\pi r_n) \ ,$$

La fonction φ, définie sur la demi-droite $[1, \infty[$, est supposée à valeurs positives, de classe C^2, concave ($\varphi'' \leqslant 0$). En outre, dans un voisinage de l'infini, sa dérivée φ' est négligeable devant 1 et la fonction 1/t devant $\varphi'(t)$ ($\varphi'(t) = o(1)$, $1/t = o(\varphi'(t))$).

a. Établir que les réels d_n, $n\in\mathbb{N}^*$, sont strictement positifs et que les deux suites de réels d_n et $\dfrac{1}{n\, d_n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, tendent vers 0 lorsque l'entier n croît vers l'infini.

Soient B_n les nombres complexes définis par la relation : $B_n = \dfrac{1}{2i\pi}\left(\dfrac{A_{n+1}}{d_{n+1}} - \dfrac{A_n}{d_n}\right)$. Il est admis que, pour tout entier n strictement positif, l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$|A_n - B_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{d_{n+1}} - \frac{1}{d_n}\right| + \pi\,|d_n| \ .$$

b. Démontrer, lorsque l'entier N croît vers l'infini, la convergence vers 0 de la suite des réels $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} A_n$, $N\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n = 0$.

c. Est-ce que la suite des réels $r_n = \varphi(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, est équi-répartie modulo I ?

5°) Suites $(\ln^\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$:

Étant donné un réel α supérieur ou égal à 1 ($\alpha \geqslant 1$), soient A_α la suite des réels $(\ln^\alpha(n))$, $n\in\mathbb{N}^*$ et ψ_α la fonction, définie sur la demi-droite $[1, \infty[$: $x\mapsto\ln^\alpha(x)$.

a. Pour quelles valeurs du réel α, les résultats de la question 4 permettent d'affirmer que la suite A_α est équi-répartie ?

b. Soit f la fonction définie sur la demi-droite $]0, \infty[$: $x\mapsto\exp(2i\pi\ln(x))$. Déterminer une primitive de cette fonction.

c. Étant donné un entier N, strictement positif, soient L_N et I_N les deux nombres complexes définis par les relations suivantes :

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(2i\pi\ln(n)) \ ; \ I_N = \frac{1}{N}\int_1^N \exp(2i\pi\ln(x))\,dx.$$

Déterminer les limites, lorsque l'entier N croît vers l'infini, du module $|I_N|$ de I_N et de la différence $L_N - I_N$. Est-ce que la suite A_1, définie ci-dessus, est équi-répartie modulo I ?

FIN DU PROBLÈME
FIN DE L'ÉPREUVE